流体力学とソリトン (ソリトンの研究会報告集)

橋本, 英典

数理解析研究所講究録
83巻 1970年 13-24

流体力学とソリトン

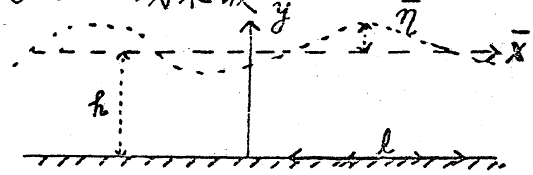
東大 宇宙研　橋本英典

§1　はしがき

流体力学でソリトンあるいはK.d.V 方程式のあらわれるばあいはかならずしも多くはない。通常対象とする空気や水などでは均一の媒質をとる限り，有限振巾波の非線型作用によるつっ立ちを止めるものが分散効果よりも散逸効果であるからである。たゞ線型波が分散性をもつばあい，すなわち1）廻転（遠心力[2),3)]，コリオリ力[1)]），成層（浮力[2),4)-7)]），渦度（マグヌス力[1),4)-7)]）などの非保存力のあらわれる系 2）浅水波[8)-14)]，表面張力波[15)]（高木氏の項参照）などの界面現象 3）泡を含む流体[16)]，プラズマなどの混相流ではその存在が導かれている。均一なプラズマなどについてはTaniuti, Wei[17)(18)], Kakutani, Ono[18)], Su Gardner[19)]を見ていたゞくことにして，こゝでは界面あるいは非均質のばあいをとらえ，K.d.V 方程式のもととなった浅水波の理論[8)-14),20)]の概観と、最近の例としてBenney, Luke[14)]による浅水波

ソリトンの２次元的相互作用（1964）と Benney[5] による成層流中の有限振巾波のとりあつかい（1965）を述べて責を果したい。

§2　浅水波[8)–14),20)]



一様な深さ h の乱されない水面内の位置ベクトルを $\bar{x}$ とし、それに鉛直に $\bar{y}$ 軸をとれば縮まない流体の渦なし運動は、3次元ポテンシャル $\bar{\Phi}$ を導入すれば

$$\bar{v} = \bar{\nabla}_3 \bar{\Phi} \quad , \qquad \bar{\Delta}_3 \bar{\Phi} = 0 \qquad (1)$$

によって支配される。たゞし $\bar{\nabla}_3$, Δ_3 はそれぞれ３次元の Gradient, Laplacian をあらわす。$\bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t})$ を水面の波動によるもり上りとすれば $\bar{\Phi}$ は次の境界條件によって定まる。

$$\bar{y} = \bar{\eta}(\bar{x}, \bar{t}) \text{ で } \begin{cases} \bar{\Phi}_{\bar{y}} = \bar{\eta}_{\bar{t}} + \bar{\Phi}_{\bar{x}} \cdot \bar{\eta}_{\bar{x}} \ (\text{運動学的B.C}) & (2) \\ \bar{\Phi}_{\bar{t}} + \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_3 \bar{\Phi})^2 + g\bar{\eta} = 0 \ (\text{圧力一定の條件}) & (3) \end{cases}$$

$$\bar{y} = -h \text{ で } \bar{\Phi}_{\bar{y}} = 0 \qquad (\text{固体底面}) \qquad (4)$$

代表的な長さとして水平方向に l, 高さ方向に h, 代表速度を $c = \sqrt{gh}$（線型浅水波の速度）とし無次元変数

$$x = \bar{x}/l, \quad y = \bar{y}/h, \quad t = (c/l)\bar{t}, \quad \Phi = \bar{\Phi}/(cl)$$

を導入すれば(1)——(4)は

$$\varepsilon \triangle \Phi + \Phi_{yy} = 0 \quad ,, \quad \nabla = \partial/\partial x, \quad \triangle = \partial^2/(\partial x)^2 \qquad (1)'$$

$$y = \eta \text{ で } \begin{cases} \Phi_y = \varepsilon[\eta_t + \nabla\Phi\cdot\nabla\eta] & (2)' \\ \Phi_t = -\frac{1}{2}\left[(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\Phi_y^2\right] & (3)' \end{cases}$$

$$y = -1 \text{ で } \quad \Phi_y = 0 \qquad (4)'$$

に帰着する。

(1)',(4)' を満足する解は水底 $y=-1$ の Φ の値 $\phi(x,t)$ を用いれば演算子

$$C = \cos(Y\sqrt{\varepsilon\triangle}) \quad \text{ただし } Y = y+1 \qquad (5)$$

$$S_1 = \sin(Y\sqrt{\varepsilon\triangle})\sqrt{\varepsilon\triangle}$$

を用いて形式的に

$$\Phi = C\phi(x,t), \quad \nabla\Phi = C\nabla\phi, \ \Phi_t = C\phi_t, \ \Phi_y = -S_1\phi$$

と書けるので(2)'(3)' から ϕ と η に対する方程式

$$S_1\phi + \varepsilon[\eta_t + (C\nabla\phi)\cdot\nabla\eta] = 0 \qquad (6)$$

$$C\phi_t + \frac{1}{2}\left[(C\nabla\phi)^2 + (S_1\phi)^2\right] + \eta = 0 \qquad (7)$$

ただし $y = \eta(x,t)$

が得られる。

§2.1 非常に浅い波の理論 $\varepsilon = (h/l)^2 \ll 1.$

(6)(7) で $\varepsilon \to 0$ とすれば $C = 1 + O(\varepsilon)$, $S_1 = Y\varepsilon\triangle + O(\varepsilon^2)$

となるので、$\nabla\phi = \mathbf{v}$, $Y = \eta + 1$ とおけば

$$\varepsilon[Y\triangle\phi + \eta_t + \nabla\phi\cdot\nabla\eta] = O(\varepsilon^2) \to \boxed{Y_t + \nabla\cdot(Y\mathbf{v}) = 0 \cdots\cdots (8)}$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \eta = O(\varepsilon) \xrightarrow{\nabla\text{をとる}} \boxed{\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{Y}\nabla\left(\frac{1}{2}Y^2\right) \cdots (9)}$$

(8),(9) は通常の浅水波の基礎式で，また密度ρが Y, 圧力pが $\frac{1}{2}Y^2$, す

なわち断熱指数2の圧縮性流体の運動を支配する方程式に一致する。振巾ηは有限であってもかまわない。こゝで，波の速さは$(dp/d\rho)^{\frac{1}{2}}=1+\eta$で$\eta$と共に増加し、その高い部分が低い部分においついて波のつっ立ちをおこし，Hydraulic jump（水面衝撃波）を形成する。

§2，2　微小振巾の理論　$\phi\sim\eta\sim O(\delta)$

逆にηが小とすれば(6),(7)は$\phi\sim\eta\sim O(\delta)\ll 1$

$Y=1+O(\delta)$だから$C=\cos(\sqrt{\varepsilon}\Delta)+O(\delta)$, $S_1=\sqrt{\varepsilon}\Delta\sin\sqrt{\varepsilon}\Delta)+O(\delta)$となることを示す。$\delta\to 0$として(6),(7)から得られる

$$\left.\begin{aligned} S_1\phi+\varepsilon\eta_t&=0 \\ C\phi_t+\eta&=0 \end{aligned}\right\}\text{すなわち}S_1\phi=\varepsilon C\phi_{tt} \tag{10}$$

で$\phi\propto\exp i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)$とおけば

$$C\phi=\cosh(\sqrt{\varepsilon}k)\phi,\quad S_1\phi=-k\sqrt{\varepsilon}\sinh(\sqrt{\varepsilon}k)\phi$$

の関係があるので，ωとkの間に　分散関係

$$\omega^2=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}k\tanh(\sqrt{\varepsilon}k) \tag{11}$$

が成り立つ。さらに$\varepsilon\to 0$とすれば$\omega=k$となり速度$1(\sqrt{gh})$の非分散波を与えるがこれは§2.1で$\eta\to 0\,(\delta\to 0)$とおいた結果と一致する。

§2.3　分散性浅水波-Boussinesq[9]の方程式

§2.1では$\varepsilon=h^2/l^2\ll 1$，§2.2では$\delta=a/h\ll 1$（aは波の振巾）としたがε,δが共に小として

$$\left(Y\Delta-\frac{\varepsilon}{6}Y^3\Delta^2\right)\Phi+\eta_t+\nabla\Phi\nabla\eta=O(\varepsilon^2\delta,\varepsilon\delta^2) \qquad (12)$$

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}Y^2\Delta\right)\Phi_t+\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2+\eta=O(\varepsilon^2\delta,\varepsilon\delta^2) \qquad (13)$$

を得る。これとε, δを小としても

i) $\varepsilon \ll \delta$ すなわち$h^3 \ll a\,l^2$が通常の浅水波を

ii) $\varepsilon \gg \delta$ すなわち$h^3 \gg a\,l^2$が線型分散波を與えるという

2重極限が問題になることを示す。

$\varepsilon \sim \delta$ のばあいはlを適当に選べば$\varepsilon=\delta$とかくことができ$O(\varepsilon^3)$を無視すれば

iii) $\varepsilon=\delta$

$$Y_t+\nabla\cdot(Y\nabla\Phi)=\frac{\varepsilon}{6}\Delta^2\Phi \qquad (14)$$

$$\Phi_t+\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2+\eta=\frac{\varepsilon}{2}\Delta\Phi_t \qquad (15)$$

$Y=1+\eta$ を消去し $O(\varepsilon^3)$の項を無視すれば

$$L[\Phi]\equiv\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi=\left[\frac{1}{2}\Phi_t^2+(\nabla\Phi)^2\right]_t-\frac{\varepsilon}{3}\Delta^2\Phi \qquad (16)$$

これはBoussinesqの方程式を一般化したものである。一次元伝播波として$\Delta=\partial^2/\partial x^2$, 右辺で$\partial/\partial t=\pm\partial/\partial x+O(\varepsilon)$とおけば
B方程式に帰着する。

§2.4 K.d.V.方程式

たとえば$x=0$で$u=\Phi_x=-f'(t)$, $t=0$で$\Phi=\Phi_t=0$の條件の下に$x>0$の方向に伝播する一次元波に対してεの巾級数$\Phi=\varepsilon\Phi_0+\varepsilon^2\Phi_1+\cdots\cdots$の形の解を求めようとすると(16)から次の逐次近似方式を得る。

$$L[\phi_0]=0\ ,\quad L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (17)$$

$$L[\phi_1]=\left(\frac{1}{2}\phi_t^2+\phi_x^2\right)_t-\frac{1}{3}\phi_{xxxx} \qquad (18)$$

ところが(17)の解 $\phi_0=\begin{cases} f(t-x) & x<t \\ 0 & x>t \end{cases}$

を(18)の右辺に代入してϕ_1を求めると境界条件を考慮すれば

$$\phi_1=\frac{1}{6}\left(f'''-\frac{9}{2}f'^2\right)x+\frac{1}{6}\left[f''-\frac{9}{2}\int_0^{t-x}f'^2(\xi)d\xi\right] \qquad (19)$$

となりxの大きい所で発散する解に導く。これは(18)の右辺に生ずるsecular termによるものであり。Frontの近く$x\sim t$でこれをさけるためには時間座標を縮小する特性座標変換

$$\begin{cases} \xi=x-t & (20) \\ \tau=\varepsilon t & (21) \end{cases}$$

を行ない(x,t)のかわりに(ξ,τ)を独立変数としてえらぶ。このとき(17)(18)の代りに

$$\phi_{0\xi\xi}-\phi_{0\xi\xi}=0 \qquad (22)$$

$$\phi_{1\xi\xi}-\phi_{1\xi\xi}-2\phi_{0\xi\tau}=\left(\frac{3}{2}\phi_\xi^2\right)_\xi-\frac{1}{3}\phi_{\xi\xi\xi\xi}$$

を得る。第一式は恒等式となるが第2式はϕ_0に対する方程式を与え、$\phi_{0x}=u$とおけばK.d.V方程式

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} \qquad (23)$$

に帰着し、$\xi-c\tau$だけに依存する解は一定速度で伝播する連なり波乃至孤立波を与える(29)。このように深さと波長に応じて伝播の模様が変ることは、たとえば沖から岸に押しよせる波

などに複雑な変化がありうることを予想させる。

§2.4 2つの二次元浅水孤立波[4]

(16)式に独立変数として

$$\psi_i = \psi_{i0} + \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{X} - c_i t \quad (i=1,2)\ \psi_{i0}, \mathbf{K}_i, c_i \text{ は定数} \tag{24}$$

ただし $$c_i = 1 + \varepsilon\lambda_i + \varepsilon^2 \mu_i + \cdots\cdots \tag{25}$$

を導入し $\phi = \varepsilon f^{(0)} + \varepsilon^2 f^{(1)} + \cdots\cdots$ と展開すれば，第0近似として

$$L[f^{(0)}] = 0,\quad L = 2[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 1]\frac{\partial^2}{\partial\psi_1 \partial\psi_2},\ \alpha_i = \arg(\mathbf{K}_i) \tag{26}$$

を得る。(26)の解 $$f^{(0)} = f_1^{(0)}(\psi_1) + f_2^{(0)}(\psi_2) \tag{27}$$

を用いれば $f^{(1)}$ に対する方程式は

$$L[f^{(1)}] = -\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{3}f_i^{(0)''''} + 3f^{(0)'}f_i^{(0)''} - 2\lambda_i f_i^{(0)''}\right) - [1+2\cos(\alpha_1-\alpha_2)](f_1^{(0)''}f_2^{(0)'} + f_1^{(0)'}f_2^{(0)''}) \tag{28}$$

に帰する。右辺第1項は secular term であるので，これが0となることを要請し積分すれば

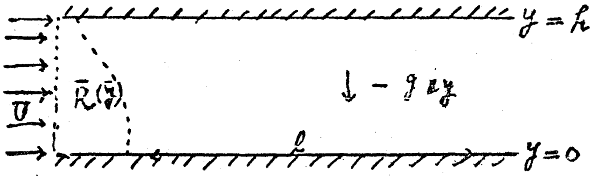
$$\frac{1}{3}f^{(0)'''} + \frac{3}{2}(f_i^{(0)'})^2 - 2\lambda_i f_i^{(0)} = d_i \tag{29}$$

これは $i = 1, 2$ に応じて違った方向 $(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)$ に伝播するつらなり波 $(d_i \neq 0)$ 乃至は孤立波 $(d_i = 0)$ を与える。このとき(28)は解

$$f^{(1)} = \frac{1+2\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{2[1-\cos(\alpha_1-\alpha_2)]}[f_1^{(0)}f_2^{(0)}]' + f_1^{(1)}(\psi_1) + f^{(2)}(\psi_2) \tag{30}$$

を持つが第1項は2つの波の相互作用交角$\frac{2}{3}\pi$のときは消失する。また孤立波のときは、その交点に局在する。($\alpha_1 \doteqdot \alpha_2$ときは近似が悪い)。第2, 3項および$\mu_i$は(6)(7)の高い近似のsecular termから決定され[14]、連なり波の速度が単独のときより変化するが、$\alpha_1-\alpha_2=\frac{2}{3}\pi$のとき、あるいは孤立波同士のときは影響のないことを示す。

§3 成層流体中の有限振巾波



重力$-g\mathbf{e}_y$の下に水平固体壁$y=0, h$の間を一様な速度$\bar{U}$で流れる2次元成層流(密度$\bar{\rho}=\bar{R}(\bar{y})$)を考える。流体の圧縮性、散逸効果を無視すれば、流れは

$$\frac{D\bar{\rho}}{Dt}=\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{\nabla})\bar{\mathbf{v}}\right]\bar{\rho}=0 \qquad (31)$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{\mathbf{v}}=0 \qquad (32)$$

(非圧縮性)

$$\bar{\rho}\frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt}=-\bar{\nabla}p-\bar{\rho}g\mathbf{e}_y \qquad (33)$$

(運動方程式)

によって支配される。たゞし$\bar{\rho}$は密度、pは圧力とする。流れの方向の長さをl、深さをh、流速を$(\bar{U}, h\bar{U}/l)$で無次元化し、ーのない量であらわす。(32)は$\mathbf{v}=(u, v)$が流れの関数$\delta\psi$

$$u=1+\delta\partial\psi/\partial y, \qquad (34)$$

$$v=-\delta\partial\psi/\partial x, \qquad (35)$$

によって導かれることを示す。密度の$R(y)$からのずれを$\delta\rho$とすれば(31),(33)は

$$\rho_t - R_y\psi_x + \delta(\rho_x\psi_y - \rho_y\psi_x) = 0 \tag{36}$$

$$(R\psi_{yt})_y - \rho_x + \delta[\rho\psi_{yt} + R(\psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy})]_y + \varepsilon R\psi_{xxt}$$
$$+ \delta^2[R(\psi_y\psi_{xy} - \psi_x\psi_{yy})]_y + \varepsilon\delta[\rho\psi_{xt} + R(\psi_y\psi_{xx} - \psi_x\psi_{xy})]_x$$
$$+ \varepsilon\delta^2\{\rho(\psi_y\psi_{xx} - \psi_x\psi_{xy})\}_x = 0 \tag{37}$$

を與える。境界條件は壁で$v=0$ すなわち

$$y = 0, 1 \text{ で} \qquad \psi_x = 0 \tag{38}$$

となる。

(36),(37)でε, δを0とおいたψ, ρに対する線型方程式は

$$\psi = A(x,t)\phi(y),\ \rho = A(x,t)\varphi(y) \tag{39}$$

の形の解を持ち

$$\frac{A_t}{A_x} = \frac{R_y\phi}{\varphi} = \frac{\varphi}{(R\phi_y)_y}\ (= -c) \tag{40}$$

を與える。x, tの関係とyの関係が等しいためにはそれが一定値$-c$に等しいことが要求される。その値cは

$$A_t = -cA_x \tag{41}$$

が示すようにx方向に進む線型波の速度を与えるが(40)からφを消去して得られる

$$L[\phi] = (R\phi')' - \frac{1}{c^2}R\phi = 0 \tag{42}$$

の境界條件((39),(40)による)

$$\phi(0) = \phi(1) = 0 \tag{43}$$

に対する固有値c_n(対応する固有関数を$\phi_n(y)$としよう)に等しい。密度分布が安定のときはc_nは実なので以下これを假

定する。C_nに相当する(簡単のためにCとする)有限振巾の分散波を求めるために(39)を拡張してψ, ρを

$$\psi = A\phi(y) + \delta A^2\phi^{(1)}(y) + \varepsilon A_{xx}\phi^{(2)}(y) + \cdots \qquad (44)$$

$$\rho = A\varphi(y) + \delta A^2\varphi^{(1)}(y) + \varepsilon A_{xx}\varphi^{(2)}(y) + \cdots \qquad (45)$$

の形に假定すればAを

$$A_t = -CA_x + 2\delta r A A_x + \varepsilon s A_{xxx} + \cdots \qquad (46)$$

の形に選べばよいことがわかる。(定数r, sは以下で定まる)

$\delta = \varepsilon$としても一般性を失なわないので(lを適当にえらぶ)

(44)-(46)を(36)-(38)に代入 $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$を消去すれば

$$L[\phi^{(1)}] = 2r\frac{R}{C^3}\phi + \frac{1}{2C}(R'\phi\phi')' + \frac{1}{2C}[R(\phi'^2 - \phi\phi'')]' - \frac{1}{2C^3}R''\phi^2$$

$$L[\phi^{(2)}] = -R\phi + \frac{2s}{C^3}R'\phi$$

$$\phi^{(1)}(0) = \phi^{(1)}(1) = 0, \quad \phi^{(2)}(0) = \phi^{(2)}(1) = 0 \qquad (47)$$

を得る。右辺がsecular termを持たぬようにするためにはϕと直交しなくはならない。これからrとsが一義的に決定し、$C = C_n$に対して

$$r_n = -\frac{3}{4}\frac{\langle R\,\phi_n'^3\rangle}{\langle R\,\phi_n'^2\rangle}, \quad s_n = -\frac{C_n}{2}\frac{\langle R\,\phi_n^2\rangle}{\langle R\,\phi_n'^2\rangle} \qquad (48)$$

となる。たゞし$\langle\ \rangle$は$y=0$と1の間の積分をあらわす。

変数変換

$$\xi = x - C_n t, \quad \tau = \varepsilon t \qquad (49)$$

を行なってやると(46)はK.d.V方程式

$$A_\tau = 2\,r_n A A_\xi + s_n A_{\xi\xi\xi}$$

に他ならない。ただこのときは近似的に$\phi_n(y)$で支配されるy分布を持つ色々のmodeの波が可能であることは特筆すべきであろう。

References

1) D.J. Benney: J. Math.& Phys. 45 (1966) 52.

2) T.B. Benjamin: J. Fluid Mech. 28 (1967) 65.

3) S. Leibovich: Phys of Fluids 12 (1969) 1124.

4) R.R. Long: Tellus 8 (1956) 460.

5) R.R. Long: J. of the Atmospheric Sciences 21 (1964) 197.

6) T.B. Benjamin: J. Fluid Mech. 1, 97 (1962) 12.

7) T.B. Benjamin: J. Fluid Mech. 26 (1966) 241.

8) J. Scott Russell: "Report on Waves", British Association Report, (1844)

9) J. Boussinesq: Comptes Rendus 79 (1871)

10) Lord Rayleigh: Phil. Mag. 5, 1. (1876) 257.

11) D.J. Korteweg and G. De Vries: Phil. Mag. 5, 39 (1895) 422.

12) F. Ursell: Proc. Cambridge Phil. Soc. 49 (1953) 684.

13) T.B. Benjamin & M.J. Lighthill: Proc. Roy. Soc. 224 (1954) 448.

14) D.J. Benney & J.C. Luke: J. Math. & Phys. 43 (1964) 4, 309

15) R. Takaki: J. Phys. Soc. Japan 27 (1969) 1648.

16) L.V. Wijngaarden: J. Fluid Mech. 33 (1968) 465.

17) T.Taniuti & C.C. Wei: J. Phys. Soc. Japan 24 (1968) 941.

18) T.Kakutani, H. Ono, T.Taniuti & C.C. Wei: J. Phys. Soc. Japan 24 (1968) 1159.

19) C.H. Su & C.S. Gardener: J. Math. Phys. 10 (1969) 536.

20) J.D. Cole: Perturbation Methods in Applied Mathematics (Blaisdell, Waltham, 1968) 248.